ВОЗМОЖНЫЕ МНОЖЕСТВА ПЕРИОДОВ И ПОЧТИ ПЕРИОДОВ ДЛЯ ОДНОМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Дёмин Александр Иванович

кандидат физико-математических наук

Московский государственный технический
университет им. Н.Э. Баумана, Москва

Аннотация. Исследуется взаимная обусловленность периодических, почти периодических и рекуррентных орбит непрерывных преобразований деревьев. Получено обобщение теоремы Шарковского для этих орбит.

Ключевые слова: динамические системы, теорема Шарковского, рекуррентные точки, Стоун-Чеховская компактификация.

Введение. Одномерные динамические системы – постоянный объект исследования в общей теории динамических систем. С одной стороны, траектории этих систем обладают исключительно богатым типом динамического поведения, а с другой стороны – просто задаются и допускают достаточно полное качественное исследование. Одна из особенностей одномерных динамических систем – сильная взаимная зависимость между поведением различных траекторий.

В 1964 году А.Н. Шарковский доказал теорему, дающую неожиданный и красивый ответ на вопрос: какие периодические точки должны существовать у непрерывного отображения f отрезка в себя, если f имеет точку периода n?

Теорема Шарковского [1]. Упорядочим натуральные числа следующим образом:

$$3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright 9 \triangleright \cdots \triangleright 2\cdot 3 \triangleright 2\cdot 5 \triangleright 2\cdot 7 \triangleright \cdots \triangleright 2^2\cdot 3 \triangleright 2^2\cdot 5 \triangleright \cdots \triangleright 2^k\cdot 3 \triangleright 2^k\cdot 5 \triangleright \cdots \triangleright 2^k \triangleright \cdots \triangleright 2^2 \triangleright 2 \triangleright 1$$

Если непрерывное отображение f отрезка в себя имеет точку периода n, то f имеет периодические точки всех периодов, следующих за n в этом упорядочении.

Таким образом, для непрерывных отображений отрезка возможными множествами периодов являются начальные отрезки порядка Шарковского.

Теорема Шарковского породила важное направление в исследованиях одномерных динамических систем – комбинаторную теорию. Часть усилий здесь была направлена на получение аналогичных результатов для систем с более сложным фазовым пространством [3-7].

Другое естественное направление исследований – изучение орбит, более сложных, чем периодические – получило новый импульс после введения Е Сяндуном [8] понятия

D-функции почти периодической точки.

D-функция – это, в некотором смысле, обобщение понятия периода для почти периодических орбит.

В работах [9] и [10] автор распространил определение *D*-функции на рекуррентные точки, а также ввёл понятие почти-периода рекуррентной точки. Опишем коротко эту конструкцию.

С точки зрения топологической динамики орбита $O(x, f)$ точки x относительно отображения f есть результат действия полугруппы натуральных чисел (¥, +). Замыкание орбиты $[O(x,f)]$ естественно представляется как результат действия полугруппы (β¥, +), стоун-чеховского расширения ¥ с продолженной операцией сложения.

β¥ реализуется как множество ультрафильтров на ¥. Операции сложения и умножения продолжаются с ¥ на β¥ (см. например [12]). Пусть X – компакт, $f \in C(X, X)$, $x \in X$. Отображение $\tilde{\pi}$:¥ $\to O(x, f)$, $\tilde{\pi}(n) = f^n(x)$ однозначно продолжается до непрерывного отображения π: β¥ $\to [O(x, f)]$, такого, что для всех $\xi \in \beta$¥ $\pi(\xi + 1) = f(\pi(x))$.

Далее будем обозначать $\pi(\xi) = f^{\xi}(x)$.

Определение 1. Стабилизатором рекуррентной точки x отображения f называется множество $St_x = \pi^{-1}(x) = \{\xi \in \beta$¥$: f^{\xi}(x) = x\}$.

Лемма 1. Ультрафильтр $\xi \in St_x$ в том и только в том случае, когда ξ содержит базу фильтра $\gamma = \left\{\pi^{-1}\left(U \cap O(x, f)\right), U \in \Omega_x\right\}$, где Ω_x – база окрестностей точки x.

Таким образом, «периодическими» относительно β¥ оказываются рекуррентные точки отображения f, то есть такие, которые возвращаются в любую свою окрестность под действием некоторой итерации f.

St_x можно считать множеством всех ультрафильтров-периодов рекуррентной точки x. Оказывается, среди них можно выделить в некотором смысле «минимальный» период.

Определение 2. Ультрафильтр ξ называется наибольшим общим делителем множества $A \in \beta$¥, если для любого $n \in$ ¥ верно, что n делит ξ в том и только том случае, когда n делит любой ультрафильтр из A (делимость рассматривается относительно умножения, продолженного с ¥ на β¥).

Теорема 1. [9] В любой замкнутой подполугруппе (β¥, +) существует наибольший общий делитель.

Для рекуррентной точки x отображения f стабилизатор является замкнутой подполугруппой (β¥, +). Следовательно, существует $\xi_x \in St_x$ – наибольший общий делитель St_x.

Назовём ξ_x ***почти-периодом*** рекуррентной точки x.

Если x – точка периода k для f, то $St_x = k \cdot \beta$¥, и можно считать $\xi_x = k$.

Для непериодической рекуррентной точки x почти-период ξ_x является свободным ультрафильтром и определяется неоднозначно. Как правило, в качестве почти-периода можно выбрать любой элемент из достаточно обширного множества (мощности 2^c).

Выясним, как связано поведение отображения f на замыкании орбиты рекуррентной точки x со значением почти-периода ξ_x.

Для рекуррентной точки x замыкание орбиты $\left[O(x,f)\right]$ совпадает с ω-предельным множеством $\omega(x,f) = \bigcap\limits_{i \in \square} \left[O\left(f^i(x), f\right)\right]$. Рассмотрим действие отображения f^n на множестве $\omega(x,f)$.

$$\omega(x,f) = \omega\left(x, f^n\right) \cup \omega\left(f(x), f^n\right) \cup \ldots \cup \omega\left(f^{n-1}(x), f^n\right)$$

По аналогии с *D*-функцией почти периодической точки [8] определяется *D*-функция рекуррентной точки x – отображение f_x: ¥ → ¥, $f_x(n)$ – число несовпадающих ω-предельных множеств вида $\omega\left(f^i(x), f^n\right)$.

Соответствие между *D*-функцией f_x и почти-периодом ξ_x описывает

Теорема 2. [9] Пусть X – топологическое пространство, x – рекуррентная точка отображения $f \in C(X,X)$, тогда $\forall n \in$ ¥ $f_x(n) = НОД(n, \xi_x)$.

Следствие. Если функция s: ¥ → ¥ является *D*-функцией некоторой рекуррентной точки, то она удовлетворяет условиям

1. Для любых взаимно простых m и n $s(m \cdot n) = s(m) \cdot s(n)$;

2. Для любого простого p существует $\alpha(p) \in$ ¥ $\cup \{0\} \cup \{\infty\}$, такое, что для всех $i \in$ ¥ $s\left(p^i\right) = \min\left(p^i, p^{\alpha(p)}\right)$.

Оказывается, верно и обратное: любая функция, удовлетворяющая условиям 1 и 2, реализуется как *D*-функция в некоторой динамической системе.

В работе [8] для любой функции s, удовлетворяющей условиям 1 и 2, проведено построение последовательности α_s из нулей и единиц, почти периодической (а значит, и рекуррентной) относительно единичного сдвига σ и такой, что D-функция σ_{α_s} совпадает с заданной функцией s.

Перейдём к рассмотрению периодических и рекуррентных орбит непрерывных отображений деревьев (конечных односвязных графов).

Специфика одномерных динамических систем позволяет предположить, что результаты типа теоремы Шарковского должны существовать и для рекуррентных орбит. Например, в работе А.Н. Шарковского [2] вышедшей в 1964 году, содержится довольно простое утверждение, ставшее известным в англоязычном мире только после работы [11] Ковена и Хедлунда 1980 года: для непрерывного отображения интервала в себя множество рекуррентных точек лежит в замыкании множества периодических. Доказательство этого факта легко переносится на случай любого односвязного графа. В свете этого результата естественно предположить, что поведение рекуррентных траекторий преобразований деревьев существенно, если не полностью определяется поведением периодических траекторий.

Основной результат данной работы – связь между множествами периодов и почти-периодов для непрерывного отображения дерева в себя.

Пусть X – дерево, $f \in C(X, X)$.

Обозначим

$Per(f)$ – множество периодов периодических точек,

$Rec(f)$ – множество почти-периодов рекуррентных (в том числе и периодических) точек f.

$Per(f) \in ¥$, $Rec(f) \in \beta ¥$

Теорема 3. $Rec(f) \subset \left[Per(f)\right]_{\beta\Box}$, и для любого открытого подмножества $U \subset X$ $Rec\left(f|_U\right) \subset \left[Per\left(f|_U\right)\right]_{\beta\Box}$.

Теорема 4. Для любого $f \in C(X,X)$ можно выделить замкнутое множество $A \subset X$, состоящее из периодических точек отображения f, так, что для оставшегося множества $X \setminus A$ любой ультрафильтр ξ из замыкания множества периодов $\left[Per\left(f|_{X\setminus A}\right)\right]_{\beta}$ определяет *D*-функцию f_x некоторой рекуррентной точки x отображения f (по правилу $f_x(n) = НОД(n,\xi)$).

Как следствие этих теорем (используя результаты А.М. Блоха [7] и Е Сяндуна [8]) можно получить описание возможных множеств периодов и почти-периодов для непрерывных отображений деревьев.

Следствие 1. Множество $A \in \beta$¥ является множеством периодов и почти-периодов непрерывного отображения дерева, если A почти совпадает (с точностью до конечного множества $B \in$ ¥) с конечным объединением множеств вида $k \cdot \beta$¥ и $l \cdot \left(\bigcap_{i \in ¥} 2^i \cdot \beta ¥\right)$.

Доказательство теорем 3 и 4 основано на подробном рассмотрении структуры множества рекуррентных точек непрерывного отображения графа (декомпозиции этого множества, построенной в работе [7]) и на использовании следующего свойства рекуррентных и периодических точек отображений деревьев:

Лемма 2. [10] Пусть X – конечный односвязный граф (дерево), $x \in X$ – рекуррентная непериодическая точка отображения $f \in C(X,X)$, *x* не является точкой ветвления X, и почти-период ξ_x взаимно прост с *n*.

Тогда в любой окрестности *x* найдётся периодическая точка отображения *f* периода, взаимно простого с *n*.

Список использованных источников

1. Шарковский А.Н. Сосуществование циклов непрерывного отображения прямой в себя // Украинский математический журнал. 1964. № 1. С. 61-71.
2. Шарковский А.Н. Неблуждающие точки и центр непрерывного отображения прямой в себя // Доклады АН УССР. 1964. № 7. С. 365-368.
3. Alseda L., Llibre J., Misiurevicz M. Periodic orbits of maps of Y // Trans. Amer. Math. Soc. 1989. V. 313. P. 475-538.
4. Block L., Guckenheimer J., Misiurevicz M., Young L.S. Periodic points and topological entropy of one dimensional maps // Lecture notes in math. 1980. V. 819. P. 18-34.
5. Misiurevicz M. Periodic points of maps of degree one of a circle // Ergod. Th. Dynam. Sys. 1982. V. 2. P. 221-227.
6. Baldwin S. An extension of Sharkovskii`s theorem to n-od // Ergod. Th. Dynam. Sys. 1991. V. 11. P. 249-271.
7. Blokh A.M. Spectral decomposition, periods of cycles and a conjecture of M. Misiurevicz for the graph maps // Lecture notes in math. 1992. V. 1514. P. 24-31.
8. Е Сяндун Минимальные множества и сосуществование почти периодических точек преобразований отрезка // Доклады АН СССР. Т. 309. № 5. 1989. С. 1049-1051.
9. Дёмин А.И. Стабилизатор рекуррентной точки // Вестник Московского университета. Сер. 1, математика, механика. 1994. № 6. С. 3-6.
10. Дёмин А.И. Сосуществование периодических и почти периодических орбит непрерывных отображений триода в себя // Вестник Московского университета. Сер. 1, математика, механика. 1996. № 3. С. 84-87.
11. Coven E.M., Hedlund G.A. P = R for maps of the interval // Proc. Amer. Math. Soc. 1980. V. 79. P. 316-318.
12. Hindman N. Ultrafilters and combinatorial number theory // Lecture notes in math. 1979. V. 751. P. 119-184.

СМИ Эл № ФС 77-55506 | ISSN 2309-916X